

Title	Riemann 空間の上で定義された或る種のベクトル空間に就て
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(7) p.none-p.none
Issue Date	1948-01-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75204
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

69 Riemann 空間の上で定義された或る種のベクトル空間について (J)

朝長 康郎

§1. 計量が g_{ij} で与へられた Riemann 空間 R_n の各点で $n+1$ 次元のベクトル空間を考へる。此のベクトル空間に属するベクトル $V^{\lambda(i)}$ は R_n のベクトル V^i と R_n のスカラー V^0 から成立つものとする。幾何学的には V^i と V^0 は夫々切線空間内の一つの超球の中心と半径を表すものと考へられる。 V^{λ} の計量を次の式で定義する。

$$(1.1) : g_{\lambda\mu} V^{\lambda} V^{\mu} = g_{ij} V^i V^j - V^0 V^0$$

$$(1.2) : g_{\lambda\mu} = \begin{cases} g_{ij}, & \lambda=i, \mu=j \\ 0, & \lambda=i, \mu=0 \\ -1, & \lambda=0, \mu=0 \end{cases} \quad -203-$$

隣接するベクトル空間同志は互に擬似的に接続してゐるものとする、即ち V^λ に
 対する共変微分を次の式で定義する。

$$(1.3) \quad V_{il}^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^i} + \Gamma_{\mu R}^\lambda V^\mu$$

之が(1.1)の計量を保存するとすれば、

$$(1.4) \quad g_{\lambda\mu, i} = 0$$

即ち

$$(1.5) \quad \frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial x^\lambda} = g_{\sigma\mu} T_{\lambda i}^\sigma + g_{\sigma\lambda} P_{\mu i}^\sigma$$

成分に分ければ、

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{mi} \Gamma_{jk}^m + g_{mj} \Gamma_{ik}^m \\ 0 = P_{iR}^0 - g_{iR} P_{0R}^0 \\ 0 = P_{0R}^0 \\ P_{iR}^i = P_{Ri}^i \end{cases}$$

なることを要するれば、

$$(1.8) \quad \Gamma_{iR}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ j R \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^R} - \frac{\partial g_{mR}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{jR}}{\partial x^m} \right)$$

となる

の接続の曲率テンソルは

$$(1.9) \quad V_{i;j}^\lambda - V_{j;i}^\lambda = V^\sigma B_{ij}^\lambda \sigma_{\sigma} \quad \text{より}$$

$$(1.10) \quad B_{\sigma ijR}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\lambda}{\partial x^R} - \frac{\partial \Gamma_{iR}^\lambda}{\partial x^j} + \Gamma_{\mu R}^\lambda \Gamma_{ij}^\mu - \Gamma_{\mu j}^\lambda \Gamma_{iR}^\mu$$

成分に分ければ

$$(1.11) \quad B_{ijR}^0 = R_{ijR}^{(2)} + P_{0R}^0 P_{ij}^0 - P_{0i}^0 P_{jR}^0$$

$$B_{ijR}^0 = P_{ijR}^0 - P_{iR,j}^0$$

$$B_{0iR}^i = g^{im} B_{mij}^0$$

$$B_{0ijR}^0 = 0$$

となる。以上の如く定義されたベクトル空間を L_R と呼ぶことにする。

§2. 二つの特別な場合

Case-1. $P_{ij}^0 + P_{ji}^0 = 0$

此の場合(1.3)から次の事がわかる。即ち R_R のベクトル V^λ が R_R の意味で自

(1) 平行移動は0から成るテンソル等はしな成り立つものとする。 (2) $R_{ijR}^m = \frac{\partial \{ \begin{smallmatrix} m \\ ij \end{smallmatrix} \}}{\partial x^R} - \frac{\partial \{ \begin{smallmatrix} m \\ iR \end{smallmatrix} \}}{\partial x^j} + \{ \begin{smallmatrix} m \\ \sigma R \end{smallmatrix} \} \{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ ij \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} m \\ \sigma j \end{smallmatrix} \} \{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ iR \end{smallmatrix} \}$

身の方角に平行に動けば V^λ も L_n の意味で平行に動く。但し

$$V^\lambda = \begin{cases} V^i & \lambda=i \\ 0 & \lambda=0 \end{cases}$$

L_n の測地線に相当するものは $\frac{dx^i}{dt}$, V^0 が曲線に沿って平行であるとして (13)

から

$$(2.1) \begin{cases} (a) \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \Gamma_{0k}^i V^0 \frac{dx^k}{dt} = 0 \\ (b) \frac{dV^0}{dt} + \Gamma_{ij}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{となる。}$$

(2.1 b) は

$$\frac{dV^0}{dt} = 0 \quad \text{即ち } V^0 = \text{常数}$$

$V^0 = \frac{c}{m}$ と置いて之を (2.1 a) に代入すれば

$$(2.2) \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \frac{c}{m} \Gamma_{0k}^i \frac{dx^k}{dt} = 0$$

之は統一場理論で有名な式である。

Case. 2 $\Gamma_{ij}^0 = f g_{ij}$ (f は或るスカラー)

此の場合は測地線の方程式は (2.1) より

$$(2.3) \begin{cases} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + g V^0 \frac{dx^i}{dt} = 0 \\ \frac{dV^0}{dt} + f \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 0. \end{cases}$$

となる。但し S は曲線の弧長とする。更に計るすれば次の様になる。

$$(a) \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

$$(b) \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds} (A e^{\int f ds} + B e^{-\int f ds})$$

$$(c) V^0 = - (A e^{\int f ds} - B e^{-\int f ds})$$

$$(d) g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - V^0 V^0 = 4AB$$

但し A, B は任意常数

之から見ると L_n の測地線は R_n の測地線の各点に成分が夫々 (2.4 b, c) の $\frac{dx^i}{dt}$, V^0 であるベクトルが附属したものである事が分る。

(1947. 8. 31)